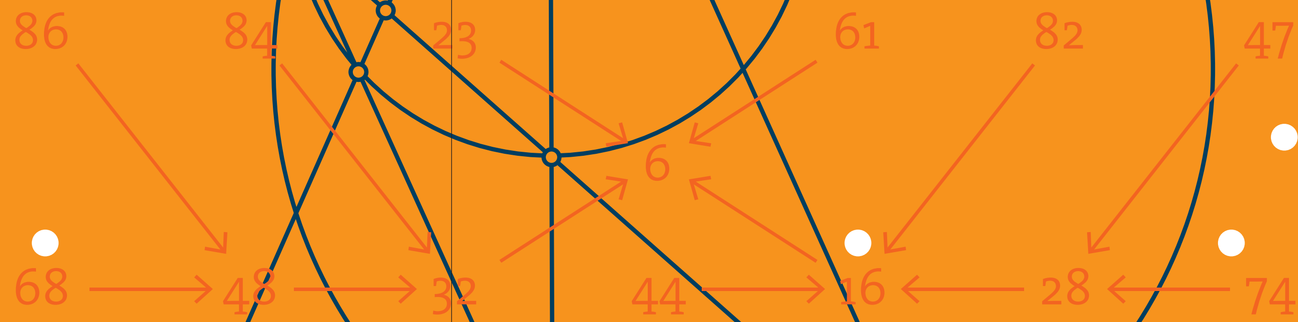
BUNDESWEITE
MATHEMATIK-WETTBEWERBE
Bildung & Begabung

MATHEMATIK-OLYMPIADE

Beispielaufgaben & Lösungen



INHALT

Impressum

Herausgeber: Aufgabenausschuss der Mathematik-Olympiaden in Deutschland

Der Aufgabenausschuss der Mathematik-Olympiaden in Deutschland wird mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen C819113 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Herausgeber.

VORWORT

Liebe Leserinnen und Leser,

seit über fünfzig Jahren haben die Mathematik-Olympiaden einen festen Platz in der Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler. Der Wettbewerb zieht jährlich über 200 000 Teilnehmerinnen und Teilnehmer von Klasse 3 bis zum Abitur in seinen Bann. Seit dem Jahr 2000 steht er unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Der 1994 als Träger des Wettbewerbs gegründete Mathematik-Olympiaden e. V. ist inzwischen in allen Bundesländern sehr aktiv.

Die Organisation und Durchführung der Olympiaden wird erst möglich durch das herausragende, meist ehrenamtliche Engagement zahlreicher Kolleginnen und Kollegen vor Ort. Sie verstehen es, ihre Freude an der Mathematik an die Teilnehmerinnen und Teilnehmer weiterzugeben.

Wir freuen uns, dass unsere Wettbewerbsaufgaben eine so große Resonanz finden. Dies ist ein Verdienst des Aufgabenausschusses, in dem sich Mathematikerinnen und Mathematiker aus Schule und Universität engagieren. Die Auswahl und Formulierung der Aufgaben ist eine zentrale Herausforderung, jedes Jahr müssen rund 150 Aufgaben mit zum Teil sehr ausführlichen Musterlösungen erstellt werden. Einen kleinen Ausschnitt finden Sie in dieser Broschüre.

Wir wünschen dem Heft eine große Verbreitung und den Leserinnen und Lesern viel Freude an unseren beispielhaft ausgewählten Aufgaben sowie viel Erfolg bei eigenen Lösungsversuchen.

Prof. Dr. Jürgen Prestin
1. Vorsitzender des Mathematik-Olympiaden e. V.

Prof. Dr. Konrad Engel
Vorsitzender des Aufgabenausschusses der Mathematik-Olympiaden

EINLEITUNG

Wer schwimmen lernen will, muss ins Wasser gehen, und wer Aufgaben lösen lernen will, muss Aufgaben lösen.

George Pólya (1887 – 1985, ungarischer Mathematiker)

Die Feststellung Pólyas, dass man Problemlösen am besten durch das Lösen von Problemen lernt, trifft in besonderem Maße auf mathematische Schülerwettbewerbe wie die Mathematik-Olympiaden in Deutschland zu. Dieser Wettbewerb bietet Schülerinnen und Schülern mit nicht alltäglichen Aufgaben einen Anreiz, ihre Fähigkeiten zu erproben und zu vertiefen. Die Lösung der Aufgaben erfordert vor allem logisches Denken, Kombinationsfähigkeit und den kreativen Umgang mit mathematischen Methoden. Darüber hinaus ermöglicht der Wettbewerb den Teilnehmenden einen Austausch mit Gleichgesinnten und erste Kontakte zu Hochschulen.

Die Tradition der Mathematik-Olympiaden reicht bis in das Schuljahr 1961 / 62 zurück. Heute werden sie jährlich bundesweit angeboten, für die Klassen 3 bis 7 in drei Runden, für die Klassen 8 bis 12 / 13 in vier Runden. In den folgenden Übersichten ist der jeweilige Ablauf dargestellt, wobei die Termine und die Gestaltung der Wettbewerbsrunden in einigen Bundesländern davon abweichen können. Der Wettbewerb für die Grundschulen findet in einigen Bundesländern zu einem späteren Zeitpunkt statt.

Klassen 3 und 4

Schulrunde **September bis Ende November**	Die Aufgaben sind über die Schule oder den jeweiligen Landesbeauftragten erhältlich – www.mathematik-olympiaden.de → Landesbeauftragte. Die Bearbeitungszeit beträgt ca. 4 Wochen.
Regionalrunde **Mitte November bis März**	Erfolgreiche Schülerinnen und Schüler der Schulrunde werden meist zentral zu einer Klausur eingeladen.
Landesrunde **Ende Februar bis Mai**	Die Besten der Regionalrunde nehmen an der Landesrunde teil, die aus einer Klausur besteht. Eine Preisverleihung schließt diese Runde und damit den Wettbewerb für die Grundschüler ab.

Klassen 5 bis 12/13

Schulrunde **September**	Die Aufgaben sind über die Schule oder den jeweiligen Landesbeauftragten erhältlich – www.mathematik-olympiaden.de → Landesbeauftragte. Die Bearbeitungszeit beträgt ca. 4 Wochen.
Regionalrunde **Mitte November**	Erfolgreiche Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Schulrunde werden zur Regionalrunde eingeladen und schreiben dort eine mehrstündige Klausur.
Landesrunde **Ende Februar**	Die Besten der Regionalrunde nehmen an der Landesrunde teil, einem ein- oder zweitägigen Klausurwettbewerb.
Bundesrunde **Mai / Juni**	Mannschaften von durchschnittlich 12 Schülerinnen und Schülern ab Klasse 8 aus allen Bundesländern nehmen an der viertägigen Bundesrunde teil. Sie wird jährlich in einem anderen Bundesland ausgetragen und umfasst zwei viereinhalbstündige Klausuren sowie ein abwechslungsreiches Rahmenprogramm. Die Bundesrunde endet mit einer großen Preisverleihungsfeier.

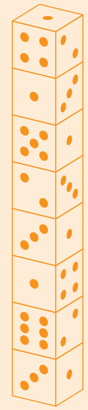
Für die Besten der Bundesrunde winkt dann noch die Aussicht auf eine internationale Herausforderung, die Internationale Mathematik-Olympiade (IMO). Sie haben sich nämlich mit ihrem Erfolg in der Bundesrunde für die Teilnahme am Auswahlwettbewerb zur Internationalen Mathematik-Olympiade qualifiziert, durch den jährlich die Mitglieder der deutschen IMO-Mannschaft ausgewählt werden.

Herzstück der Mathematik-Olympiaden sind ihre Aufgaben, auf deren Auswahl große Sorgfalt verwandt wird. Besonderes Merkmal des Wettbewerbs ist die Tatsache, dass die Aufgaben in der Aufgabenstellung und in ihrem Schwierigkeitsgrad an der jeweiligen Klassenstufe der Teilnehmenden ausgerichtet sind. Dennoch unterscheiden sie sich von den meisten der in der Schule gestellten Probleme prinzipiell: Die Problemstellungen sind komplexer und es wird zur Lösung eine breite Palette mathematischer Werkzeuge benötigt. Darüber hinaus stellen sie hohe Anforderungen an die Teilnehmenden im heuristischen Bereich. Interessante und für den Wettbewerb geeignete Aufgaben findet man vor allem in der elementaren Zahlentheorie, der Graphentheorie, der Kombinatorik, der Algebra und der Elementargeometrie. Der Aufgabenausschuss steht bei der Zusammenstellung der Aufgaben für ein Olympiadejahr vor der nicht ganz leichten Aufgabe, eine ausgewogene Mischung dieser Gebiete zu erreichen. Zudem müssen die Aufgaben auch unterschiedliche Schwierigkeitsgrade aufweisen – von leicht bis schwer. Denn sie sollen auf der einen Seite möglichst allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern Erfolgserlebnisse ermöglichen, auf der anderen Seite aber auch für die Besten eine Herausforderung darstellen.

Die vorliegende Aufgabensammlung bietet einen Querschnitt durch das reichhaltige Aufgabenmaterial der Mathematik-Olympiaden. Besonders spannend ist es, sich von ausgewählten Aufgaben zu eigenen Lösungsversuchen anregen zu lassen, ehe man sich den Lösungsbeispielen zuwendet. So wird man auf den Weg geführt, Problemlösen durch das Lösen von Problemen zu lernen.

Hanns-Heinrich Langmann
Leiter der Geschäftsstelle für die Mathematik-Olympiaden

Aufgabe 1 47. MO / 1. Stufe



Auf einem Tisch stehen 8 Würfel übereinander (siehe nebenstehende Abbildung). Tina geht um den Tisch herum und soll, ohne die Würfel anzufassen, herausfinden, wie viele Augen insgesamt verdeckt sind.

Welche Lösung kann sie finden?

Lösung

Wir wissen, dass die Summe der Augenzahlen der gegenüberliegenden Seiten immer 7 ergibt.

Wir nehmen erst einmal an, die obere Eins wäre verdeckt. Wir haben dann 8 Würfel mit jeweils einem Paar verdeckt gegenüberliegender Seiten. Das macht $8 \cdot 7 = 56$ verdeckte Augen.

Jetzt ist aber die obere Eins zu sehen, also sind in Wirklichkeit nur 55 Augen verdeckt.

Aufgabe 2 49. MO / 2. Stufe

Aus Plättchen werden folgende Muster gelegt.

1. Muster

2. Muster

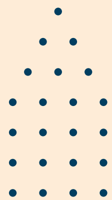
a) **Male das 3. Muster. Begründe, warum das Muster so aussieht.**

b) **Aus wie vielen Plättchen besteht das 9. Muster?**

Lösung

Teil a)

Das 2. Muster hat sich aus dem ersten dadurch ergeben, dass unten und auf der rechten Seite bis zur Spitze ein Punkt hinzugefügt wurde. Das 3. Muster ergibt sich dann in der gleichen Weise und ist rechts abgebildet.



3. Muster

Teil b)

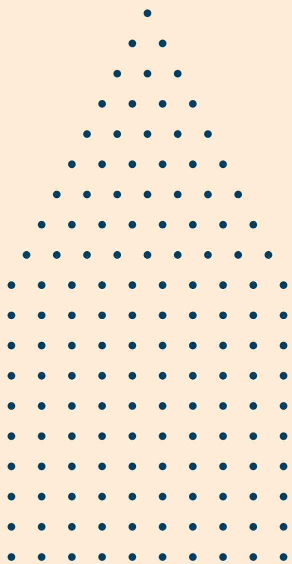
Das 9. Muster (siehe Abbildung) besteht aus 145 Plättchen:

Quadrat: $10 \cdot 10 = 100$,

Dreieckszahlen 1 bis 9: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 4 \cdot 10 + 5$.

Diese Anzahl kann man auch durch schrittweises Vorgehen erhalten:

Muster	Anzahl der Plättchen	Summe
1.	$2 \cdot 2 + 1$	5
2.	$3 \cdot 3 + 3$	12
3.	$4 \cdot 4 + 6$	22
4.	$5 \cdot 5 + 10$	35
5.	$6 \cdot 6 + 15$	51
6.	$7 \cdot 7 + 21$	70
7.	$8 \cdot 8 + 28$	92
8.	$9 \cdot 9 + 36$	117
9.	$10 \cdot 10 + 45$	145



9. Muster

Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht darin, dass man die Anzahl der Plättchen betrachtet, die von Muster zu Muster hinzukommen, und zum Beispiel notiert:

$$5 \xrightarrow{+7} 12 \xrightarrow{+10} 22 \xrightarrow{+13} 35 \xrightarrow{+16} \dots \xrightarrow{+25} 117 \xrightarrow{+28} 145.$$

Aufgabe 3 46. MO / 3. Stufe

Auf einem Bauernhof sind 17 Tiere im Stall. Sie haben insgesamt 74 Beine. Im Stall befinden sich Kühe, Gänse und Fliegen.

Wie viele Kühe, Gänse und Fliegen können sich im Stall aufhalten? Gib eine Möglichkeit an. Beachte, dass Fliegen 6 Beine haben.

Lösung

Wir lassen zunächst zu, dass auch 0 Kühe oder 0 Gänse im Stall sind.

Wären alle 17 Tiere Fliegen, hätten die Tiere im Stall 102 Beine, das sind 28 zu viel. Ersetzt man eine Fliege durch eine Kuh, verringert sich die Beinanzahl um 2. Daher kann man beispielsweise 14 Fliegen durch Kühe ersetzen und kommt dadurch auf die geforderte Anzahl von 74 Beinen.

Da außerdem 2 Kühe genauso viele Beine haben wie eine Fliege und eine Gans, erhält man noch weitere Lösungen:

Anzahl der Kühe	Anzahl der Gänse	Anzahl der Fliegen
14	0	3
12	1	4
10	2	5
8	3	6
6	4	7
4	5	8
2	6	9
0	7	10

Von diesen Lösungen entfallen aber die erste und die letzte, weil sich laut Aufgabenstellung wenigstens eine Kuh und wenigstens eine Gans im Stall befinden.

Aufgabe 1 48. MO / 1. Stufe

Du kennst die Quersumme als Summe der Ziffern einer Zahl. Hier führen wir das *Querprodukt* einer Zahl ein:
Das *Querprodukt* einer Zahl ist das Produkt der Ziffern einer Zahl. (Beispiel: 423 hat das *Querprodukt* 24, denn es ist $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.)
Eine Zahlenkette einer Zahl entsteht, indem man von dieser Zahl ausgeht, ihr *Querprodukt* bildet, von diesem *Querprodukt* wieder das *Querprodukt*, usw.
Beispiel: $79 \to (7 \cdot 9 =)63 \to (6 \cdot 3 =)18 \to (1 \cdot 8 =)8 \to 8 = 8 \to \ldots$
Wir vereinbaren: Eine Zahlenkette endet, wenn eine einstellige Zahl erreicht ist.
Die Zahlenkette der 79 ist also [79, 63, 18, 8].

a) **Bilde für jede der folgenden Zahlen die Zahlenkette: 66, 47, 57, 73, 85.**

b) **Warum kann man bei einstelligen Zahlen aufhören? Warum ist also die Vereinbarung sinnvoll?**

c) **Gib vier verschiedene zweistellige Zahlen an, deren Zahlenketten ab der zweiten Zahl gleich sind.**

d) **Finde alle zweistelligen Zahlen, deren Zahlenketten mit einer Null enden.**

e) **Finde alle zweistelligen Zahlen, deren Zahlenketten mit einer 6 aufhören.**

f) **Die Zahlenkette der 79 besteht aus vier Zahlen. Gibt es eine zweistellige Zahl mit einer längeren Kette?**

Lösung

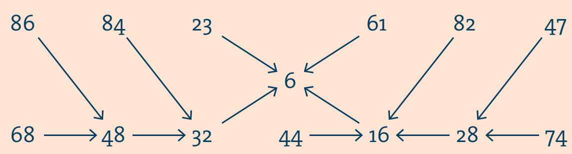
Teil a) $66 \to 36 \to 18 \to 8$: [66, 36, 18, 8],
$47 \to 28 \to 16 \to 6$: [47, 28, 16, 6],
$57 \to 35 \to 15 \to 5$: [57, 35, 15, 5],
$73 \to 21 \to 2$: [73, 21, 2],
$85 \to 40 \to 0$: [85, 40, 0].

Teil b) Bei einer einstelligen Zahl kann nicht mehr mit einer anderen Stelle multipliziert werden: Die Zahl ändert sich bei diesem Zahlenketten-Prozess nicht mehr.

Teil c) Beispielsweise bilden die Anfangszahlen 38, 83, 46 und 64 die weitere Kette $\to 24 \to 8$, denn sie haben alle das Querprodukt 24.

Teil d) Auf Null enden die Zahlenketten dann, wenn unterwegs ein Vielfaches von 10 erreicht wird. Dies ist (natürlich) der Fall für alle Vielfachen von 10 selbst, aber auch für alle Zahlen, die aus einer 5 und einer geraden Zahl bestehen (also z. B. 85 oder 54). Daher enden die Ketten der Zahlen, in denen die eben genannten Zahlen auftreten, ebenfalls auf Null. Insgesamt haben folgende Zahlen im betrachteten Zahlenraum Ketten, die auf Null enden: (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90; 25, 52; 45, 54; 56, 65; 58, 85; 55; 59, 95; 69, 96; 78, 87).

Teil e) Hier ist es sinnvoll, rückwärts zu arbeiten, sich also immer wieder zu fragen, wie sich die betrachtete Zahl als Produkt schreiben lässt, und daraus die Ziffern der Vorgänger-Zahl zu erhalten:



Alle Zahlen in dieser Abbildung und nur diese Zahlen haben ihr Zahlenkettenende auf der 6.

Teil f) Ja: $77 \to 49 \to 36 \to 18 \to 8$: [77, 49, 36, 18, 8].

Aufgabe 2 49. MO / 2. Stufe

Barbara ist Kandidatin in einer mathematischen Quizshow und hat bis jetzt alle Aufgaben richtig gelöst. Sie steht noch vor dem Hauptpreis, der sich in einem von vier Umschlägen befindet. Der Quizmaster gibt ihr drei Hinweise, von denen genau zwei falsch sind:

(1) **Der Hauptpreis befindet sich im dritten oder im vierten Umschlag.**

(2) **Der Hauptpreis befindet sich im zweiten Umschlag.**

(3) **Der Hauptpreis befindet sich nicht im vierten Umschlag.**

a) Barbara überlegt eine Weile und sagt dann: „Damit ist immer noch nicht klar, in welchem Umschlag der Hauptpreis steckt, es sind zwei Umschläge möglich." Ermittle diese beiden Umschläge.

b) „Gut", sagt der Quizmaster, „dann gebe ich dir noch einen vierten Hinweis, aber ich sage dir, dass von allen vier Hinweisen nur genau einer stimmt:

(4) Der Hauptpreis befindet sich im ersten oder im zweiten Umschlag."

Barbara öffnet sofort den Umschlag mit dem Hauptpreis. Welchen Umschlag hat sie geöffnet und warum?

Lösung

Teil a) Eine vollständige Fallunterscheidung führt zur Lösung der Aufgabe:

Fall 1: Aussage (1) ist wahr und die anderen beiden sind falsch.
Wenn Aussage (1) wahr ist, ist der Hauptpreis im Umschlag 3 oder 4. Aussage (3) muss falsch sein, somit ist der Hauptpreis im Umschlag 4. Aussage (2) muss falsch sein und ist es dann auch. Der Hauptpreis kann im Umschlag 4 sein.

Fall 2: Aussage (2) ist wahr und die anderen beiden sind falsch.
Wenn Aussage (2) wahr ist, ist der Hauptpreis im Umschlag 2. Die Aussage (3) muss falsch sein, danach müsste der Hauptpreis im Umschlag 4 sein – und das ist ein Widerspruch.

Fall 3: Aussage (3) ist wahr und die anderen beiden sind falsch.
Wenn Aussage (3) wahr ist, ist der Hauptpreis nicht im Umschlag 4. Aussage (2) muss falsch sein, folglich ist er auch nicht im Umschlag 2. Aussage (1) muss auch falsch sein, und der Hauptpreis ist nicht in den Umschlägen 3 und 4. Also kann er nur noch im Umschlag 1 sein.

Barbara hat festgestellt, dass der Hauptpreis entweder im Umschlag 1 oder im Umschlag 4 sein kann.

Teil b) Die Aussage (4) muss falsch sein, da die einzige wahre Aussage bereits unter den Aussagen (1) bis (3) gewesen sein muss. Da die Aussage (4) falsch ist, ist der Hauptpreis nicht in den Umschlägen 1 und 2. Damit muss der Hauptpreis nach dem Ergebnis der Teilaufgabe a) im Umschlag 4 sein. Die Aussage (1) ist wahr, die anderen sind falsch.

Aufgabe 3 48. MO / 3. Stufe

Wenn man einen Käfer (oder einen Roboter oder einen Zeichenstift) auf einem quadratischen Gitter bewegen will, so kann man dies durch eine Folge von drei Grundkommandos machen:

G – Gehe von einem Gitterpunkt eine Kästchenlänge und ändere am nächsten Gitterpunkt deine Richtung nicht.
L – Gehe eine Kästchenlänge und wende dich am nächsten Gitterpunkt nach links.
R – Gehe eine Kästchenlänge und wende dich am nächsten Gitterpunkt nach rechts.

Grundsätzlich soll am Anfang der Käfer „mit dem Gesicht nach rechts" stehen, also auf einer waagerechten Gitterlinie nach rechts gehen. Wir geben zwei Folgen von Kommandos vor:

(1) LRRG,
(2) LRRGLLRRG.

a) Zeichne auf kariertem Papier für beide Folgen jeweils die Figur, die entsteht, wenn die Kommandofolge viermal hintereinander durchgeführt wird.
Ermittle für beide Figuren den Umfang (gemessen in Kästchenlängen) und den Inhalt (gemessen in Kästchen).

b) Jetzt wird bei der Kommandofolge (1) *jeder Weg über eine Kästchenlänge* durch einen Weg ersetzt, der durch die Kommandofolge

(3) LRRGLLRG

erzeugt wird und bei dem die Weg-Einheit nur ein Viertel einer Kästchenlänge beträgt. Wie viele Kästchen umschließt der Weg nach viermaliger Durchführung der so veränderten Folge nun? Wie viele Kästchenlängen ist der Weg lang?

c) *Beweise:* Wenn sich in einer Kommandofolge die Zahl der Buchstaben R und der L um genau 1 unterscheidet, dann entsteht bei viermaliger Durchführung ein geschlossener Weg, der bei weiteren Durchführungen immer wiederholt wird.

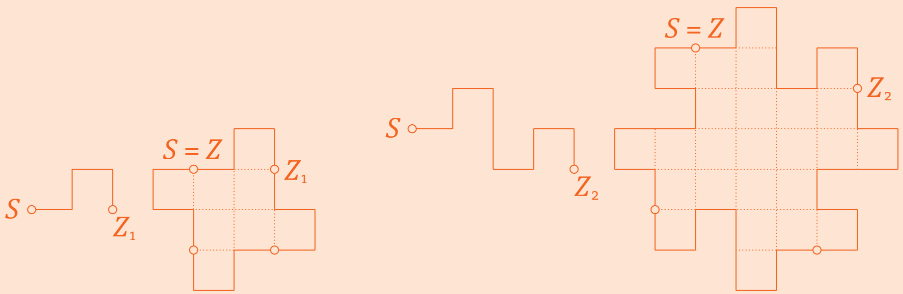
Lösung

Teil a) Der zur Kommandofolge (1) gehörende Weg SZ_1 und die durch vierfache Anwendung von (1) gehörende Figur sind in der Abbildung Seite 14 links zu sehen. Durch Abzählen erhält man für diese Figur den Umfang von $(4 \cdot 4 =) 16$ Kästchenlängen und den Inhalt von 8 Kästchen.

Der zur Kommandofolge (2) gehörende Weg SZ_2 und die durch vierfache Anwendung von (2) gehörende Figur sind in der Abbildung rechts dargestellt.

Da jedem Kommando ein Weg von einer Kästchenlänge zugeordnet ist, hat diese Figur den Umfang von (9 · 4 =) 36 Kästchenlängen.

Durch Abzählen erhält man für die Figur den Inhalt von 25 Kästchen.



Teil b) Die Ersetzung eines Weges von einer Kästchenlänge durch (3) mit einer Viertelkästchenlänge als Grundeinheit ändert nicht die umschlossene Fläche (denn (3) fügt jeweils ein kleines Kästchen hinzu und schließt danach ein kleines Kästchen wieder aus).

Da (3) acht Schritte von jeweils einer Viertelkästchenlänge umfasst, hat (3) die Gesamtlänge von ($8 \cdot \frac{1}{4}$ =) 2 Kästchenlängen. Der geschlossene Weg mit dem Kommando (1) umfasst 16 Kästchenlängen (siehe Teil a)).

Also hat der Gesamtweg um die geschlossene Figur jetzt (16 · 2 =) 32 Kästchenlängen, seine Länge hat sich verdoppelt.

Teil c) Für den Beweis sind zwei Dinge wesentlich:

Mit einer „überschüssigen", nicht ausgeglichenen Drehung nach L bzw. R hat der Käfer (Roboter, Zeichenstift) am Ende der Folge seine Ausrichtung um 90° gedreht, nach viermaliger Durchführung also um 360°.

Zugleich wird der Weg, der bei der ersten Durchführung waagerecht nach rechts / links ausgeführt wird, bei der zweiten Durchführung senkrecht nach unten / oben ausgeführt, und zwar um dieselbe Weite; bei der dritten Durchführung waagerecht nach links / rechts und bei der vierten wieder senkrecht nach oben / unten. Zusammengenommen landet der Käfer (Roboter, Zeichenstift) wieder auf dem Ausgangspunkt, und da die „Blickrichtung" wieder wie am Anfang ist, wiederholt er den Weg.

Aufgabe 1 50. MO / 1. Stufe

Auf einem Tisch stehen 4 geschlossene Kästchen. Eines davon enthält Goldklumpen, eines Sand, eines Kieselsteine und eines Holzkugeln. Drei dieser Kästchen sind beschriftet. Auf einem steht „Gold oder Sand", auf einem anderen „Kieselsteine oder Holz" und auf dem dritten „Gold oder Holz". Anna darf sich eines dieser Kästchen auswählen und möchte natürlich das mit dem Gold bekommen. Sie erfährt, dass alle Aufschriften der Wahrheit entsprechen. Anna darf zwar keines der Kästchen anfassen, aber bevor sie eines auswählt, darf sie sich eines öffnen lassen und hineinschauen.

Untersuche, ob es für Anna eine Möglichkeit gibt, mit Sicherheit das Kästchen mit dem Gold zu erhalten.

Lösung

Wir bezeichnen das Kästchen mit der Aufschrift „Gold oder Sand" mit K_1, das Kästchen mit der Aufschrift „Kieselsteine oder Holz" mit K_2, das Kästchen mit der Aufschrift „Gold oder Holz" mit K_3 und das Kästchen ohne Aufschrift mit K_4.

Da jedes Kästchen nur ein Material enthält, kann keines der Materialien mehrfach vorkommen. Käme eines mehrfach vor, gäbe es für die anderen Materialien zu wenige Kästchen.

Wir zeigen nun durch eine vollständige Fallunterscheidung, dass Anna mit Sicherheit das Kästchen mit Gold erhalten kann, wenn sie sich das Kästchen ohne Aufschrift zeigen lässt:

Fall 1: Wenn K_4 Gold enthält, so hat sie das richtige Kästchen schon gefunden.

Fall 2: Wenn K_4 Sand enthält, so muss K_1 Gold enthalten, da K_1 nicht noch einmal Sand enthalten kann.

Fall 3: Wenn K_4 Kieselsteine enthält, so muss K_2 Holz enthalten, da K_2 nicht noch einmal Kieselsteine enthalten kann. Da K_3 nun nicht noch einmal Holz enthalten kann, muss K_3 Gold enthalten.

Fall 4: Wenn K_4 Holz enthält, so muss K_3 Gold enthalten, da K_3 nicht noch einmal Holz enthalten kann.

In jedem Fall kann Anna folglich nach der Prüfung des Inhalts des Kästchens ohne Aufschrift eindeutig ermitteln, welches Kästchen Gold enthält, und sich dann für dieses Kästchen entscheiden.

Hinweis: Aus der Aufgabenstellung kann für die jeweiligen Fälle (nach Prüfung des Inhalts des Kästchens ohne Aufschrift) der Inhalt der anderen Kästchen ermittelt werden. Dies wird jedoch laut Aufgabenstellung nicht gefordert.

Aufgabe 2 49. MO / 2. Stufe

Über ein Viereck $ABCD$ wird vorausgesetzt:

(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

(2) Der Winkel BAD hat die Größe $\alpha = 64°$.

(3) Die Seite $\overline{AD}$ ist 5 cm lang.

(4) Die Seite $\overline{CD}$ ist 3 cm lang.

(5) Die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist gleich der Summe der Längen der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$.

Zeichne das Viereck $ABCD$ und leite aus den Voraussetzungen die Größen der restlichen Innenwinkel des Vierecks ab.

Lösung

Nach Aufgabenstellung gilt

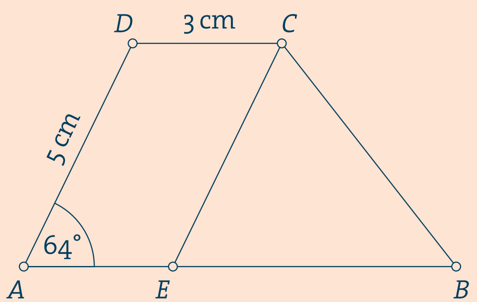
(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$,

(2) $|\sphericalangle BAD| = \alpha = 64°$,

(3) $|AD| = 5$ cm,

(4) $|CD| = 3$ cm,

(5) $|AB| = |BC| + |CD|$.



Eine Zeichnung des Vierecks befindet sich in der Abbildung.

Die einem Schenkel anliegenden Winkel eines Trapezes ergänzen einander zu 180°. Aus (1) und (2) folgt daher

$|\sphericalangle ADC| = 180° - 64° = 116°.$

Aus (5) folgt $|AB| > |CD|$. Daher folgt aus (1), dass es auf der Strecke $\overline{AB}$ genau einen Punkt E gibt, für den $AECD$ ein Parallelogramm ist. Gegenüberliegende Winkel in einem Parallelogramm sind stets gleich groß. Aus (2) folgt daher

$|\sphericalangle DCE| = 64°.$ (6)

Gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind stets parallel. Daher folgt aus (2) nach dem Stufenwinkelsatz

$|\sphericalangle BEC| = 64°.$ (7)

Aus (5) folgt $|BC| = |AB| - |CD|$. Da E auf der Seite $\overline{AB}$ liegt, gilt $|BE| = |AB| - |AE|$. Weil $AECD$ ein Parallelogramm ist, gilt $|CD| = |AE|$. Hieraus folgt dann $|BC| = |BE|$. Nach dem Basiswinkelsatz für das Dreieck CEB folgt hieraus $|\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle BEC|$, wegen (7) also

$|\sphericalangle ECB| = 64°.$ (8)

Wegen $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle DCE| + |\sphericalangle ECB|$ und (6) folgt hieraus $|\sphericalangle DCB| = 64° + 64° = 128°$. Aus (7) und (8) folgt nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck CEB

$|\sphericalangle CBE| = 180° - |\sphericalangle BEC| - |\sphericalangle ECB| = 180° - 64° - 64° = 52°.$

Da E auf der Seite $\overline{AB}$ liegt, gilt $|\sphericalangle CBA| = 52°$. Für die restlichen Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ gilt somit

$|\sphericalangle CBA| = 52°$, $|\sphericalangle DCB| = 128°$ und $|\sphericalangle ADC| = 116°$.

Hinweis: Die Voraussetzungen (3) und (4) werden nur für die Zeichnung benötigt.

Aufgabe 3 47. MO / 3. Stufe

Tim und Tom sind gute Freunde. Nach dem (in vollen Lebensjahren angegebenen) Alter gefragt, antwortet Tim: „Ich bin jetzt doppelt so alt, wie Tom war, als ich so alt war, wie Tom jetzt ist. Wenn Tom so alt sein wird, wie ich jetzt bin, dann werden wir zusammen 63 Jahre alt sein.“

Wie alt ist Tim? Wie alt ist Tom? Überprüfe deine Ergebnisse durch eine Probe.

Lösung

Tim sei $2x$ Jahre alt, Tom sei y Jahre alt. Dann war nach Aufgabenstellung Tim y Jahre alt, als Tom x Jahre alt war. Da die Differenz zwischen dem Alter von Tim und dem von Tom unverändert bleibt, gilt

$$2x - y = y - x.$$

Hieraus folgt $3x = 2y$, also $y = 1{,}5x$. Für den Altersunterschied gilt daher

$$y - x = 1{,}5x - x = 0{,}5x.$$

Folglich ist Tim $0{,}5x$ Jahre älter als Tom. Wenn Tom $2x$ Jahre alt sein wird, wird Tim $2{,}5x$ Jahre alt sein. Nach Aufgabenstellung gilt daher $2x + 2{,}5x = 63$, also $4{,}5x = 63$ und daher $x = 14$.

Folglich ist Tim 28 Jahre und Tom 21 Jahre alt.

Probe: Vor (28 – 21 =) 7 Jahren war Tim 21 Jahre und Tom 14 Jahre alt. Wegen 28 : 2 = 14 hat Tom tatsächlich jetzt das Alter, das Tim zu dem Zeitpunkt hatte, als Tom halb so alt war, wie Tim jetzt ist. In 7 Jahren wird Tim (28 + 7 =) 35 Jahre alt sein und Tom wird 28 Jahre alt sein. Wegen 35 + 28 = 63 werden die beiden dann tatsächlich zusammen 63 Jahre alt sein.

Bemerkung: Folgende Tabelle dient der Lösungsfindung, hält die Lösung fest und erleichtert die Probe.

	Heute		Als Tim das Alter von Tom hatte		Wenn Tom das Alter von Tim haben wird	
Tims Alter in Jahren	$2x$	28	$1{,}5x$	21	$2{,}5x$	35
Toms Alter in Jahren	$1{,}5x$	21	x	14	$2x$	28
Summe der Alter					$4{,}5x$	63

Aufgabe 4 47. MO / 4. Stufe

Der Mathematiker Dr. Eieck veranstaltet eine Denkerparty. Dazu treibt er in jede Ecke seines dreieckigen Rasens einen Pflock und schlägt zusätzlich insgesamt n weitere Pflöcke am Rand oder im Inneren der Rasenfläche ein. Innerhalb des Rasens seien genau k Pflöcke ($0 \le k \le n$) eingesetzt, und von ihnen liegen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden. Nun befestigt er möglichst viele, nicht unbedingt gleich lange Hängematten an den Pflöcken, die einander natürlich nicht überschneiden dürfen. Auf diese Weise wird das Rasendreieck in Teildreiecke zerlegt, in die er jeweils einen Stehtisch mit Papier, Schreibzeug und Getränken stellt.

a) **Ermittle die Anzahl s der Stehtische und die Anzahl h der Hängematten für folgende konkrete Fälle: $n = 3$ und $k = 0, 1, 2$ oder 3; $n = 4$ und $k = 0$.**
Hinweis: **Dabei reicht es, jeweils einen solchen Fall zu betrachten, obwohl es verschiedene Möglichkeiten für die Platzierung der Pflöcke gibt.**

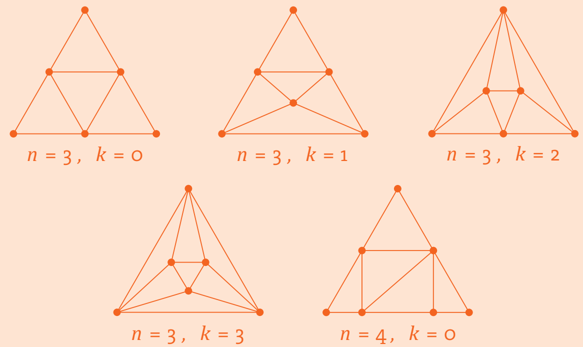
b) **Gib jeweils eine Formel für die Anzahl $s(n, k)$ von Stehtischen und für die Anzahl $h(n, k)$ von Hängematten in Abhängigkeit von n und k an und berechne $s(33, 22)$ und $h(33, 22)$.**

c) **Beweise die Richtigkeit dieser beiden Formeln.**

Lösung

Teil a) Die in der Tabelle unterlegten Zahlen sind die gesuchten Anzahlen der Stehtische und der Hängematten. Diese Anzahlen kann man durch Abzählen aus den angegebenen Abbildungen neben der Tabelle erhalten.

n	k	s	h
3	0	4	9
3	1	5	10
3	2	6	11
3	3	7	12
4	0	5	11
4	1	6	12
4	2	7	13
4	3	8	14
4	4	9	15



Teil b) Es gilt

$$s(n, k) = n + k + 1,$$
$$h(n, k) = 2n + k + 3.$$

Folglich gilt

$$s(33, 22) = 56,$$
$$h(33, 22) = 91.$$

Teil c) Für die Beweise ist eine Unterscheidung zwischen den k Punkten im Inneren und den $(n - k)$ Punkten auf dem Rand des Dreiecks erforderlich.

Die Summe der Größen aller Innenwinkel der Teildreiecke lässt sich aus der Innenwinkelsumme des Dreiecks, den bei den $(n - k)$ Punkten auf dem Rand vorkommenden 180°-Winkeln und den bei den k Punkten im Inneren des Dreiecks vorkommenden 360°-Winkeln wie folgt berechnen:

$$180° + (n - k) \cdot 180° + k \cdot 360° = 180° \cdot (n + k + 1).$$

Folglich gilt für die Anzahl der Teildreiecke

$$s(n, k) = n + k + 1.$$

Jede Verbindungsstrecke zweier Punkte im Inneren des Dreiecks ist gleichzeitig eine Seite von zwei Teildreiecken im Inneren des Dreiecks. Folglich gibt $3(n + k + 1)$ die Anzahl der Seiten der Teildreiecke an, wobei alle im Inneren des Dreiecks liegenden Dreiecksseiten doppelt gezählt werden.

Die $(n - k)$ Punkte auf dem Rand des Dreiecks sind zusammen mit den drei Eckpunkten des Dreiecks die Endpunkte von $(n - k + 3)$ Seiten von Teildreiecken, die auf dem Rand liegen. Addiert man diese Anzahl zu $3(n + k + 1)$, dann werden alle Seiten der Teildreiecke doppelt gezählt, und die Hälfte dieser Anzahl gibt schließlich die Anzahl der Seiten der Teildreiecke an. Wegen

$$[3(n + k + 1) + (n - k + 3)] : 2 = [4n + 2k + 6] : 2 = 2n + k + 3$$

gilt daher für die Anzahl der Seiten der Teildreiecke

$$h(n, k) = 2n + k + 3.$$

Aufgabe 1 48. MO / 1. Stufe

Als Polyeder bezeichnet man einen Körper, der von endlich vielen ebenen Seitenflächen begrenzt wird.

Zeigen Sie, dass jedes Polyeder zwei Ecken hat, von denen gleich viele Kanten ausgehen.

Lösung

Sei m das Maximum unter den Anzahlen von Kanten, die von einer Ecke ausgehen, und E eine Ecke mit m Kanten. Dann hat diese Ecke m (über eine Kante) benachbarte Ecken E_1, …, E_m, von denen k_1, …, k_m Kanten ausgehen, wobei stets $3 \leq k_i \leq m$ gilt. Nach dem Schubfachprinzip sind also wenigstens zwei dieser Kantenanzahlen gleich.

Lösungsvariante: Sei n die Anzahl der Ecken des Polyeders. Von jeder Ecke gehen Kanten aus, die in verschiedenen anderen Ecken enden. Also können von keiner Ecke n oder mehr Kanten ausgehen.

Von jeder Ecke geht aber mindestens eine Kante aus (in der Tat sogar mindestens drei, was aber für die Lösung nicht relevant ist), weswegen für die Anzahlen der von einer Ecke ausgehenden Kanten weniger als n Möglichkeiten bleiben. Nach dem Schubfachprinzip sind also wenigstens zwei dieser Kantenanzahlen gleich.

Aufgabe 2 47. MO / 2. Stufe

Max fährt immer mit der U-Bahn zur Schule. Er muss dazu an der Station „Schillerstraße“ aussteigen. Vom Bahngleis führen eine Treppe und eine Rolltreppe nach oben, Max hat jedoch die Angewohnheit, ausschließlich die Rolltreppe zu benutzen.

Max geht immer mit derselben Geschwindigkeit und hat festgestellt, dass er morgens auf dem Weg zur Schule, wenn er die Rolltreppe hinaufgeht, stets 15 Stufen zählt, und nachmittags auf dem Weg nach Hause, wenn er die Rolltreppe gegen die Fahrtrichtung hinabsteigt, 35 Stufen nehmen muss.

Diese Woche ist die Rolltreppe kaputt. Wie viele Stufen wird Max jetzt zählen, wenn er die Rolltreppe benutzt?

Hinweis: **Der Effekt, dass die Treppenstufen am Anfang und am Ende der Rolltreppe ihre Höhe ändern und verschwinden, ist zu vernachlässigen.**

Lösung

Es sei x die gesuchte Anzahl Stufen. Des Weiteren sei v_M bzw. v_T die jeweilige Geschwindigkeit von Max bzw. der Rolltreppe (gemessen in Stufen pro Minute). Offensichtlich gilt $v_M > v_T$, sonst könnte Max die Rolltreppe nicht gegen die Fahrtrichtung überwinden.

Wie lange befindet sich Max auf dem Weg zur Schule auf der Rolltreppe? Relativ zur Rolltreppe bewegt sich Max mit der Geschwindigkeit v_M und legt in der gesuchten Zeit 15 Stufen zurück. Das macht $\frac{15}{v_M}$ Minuten.

Andererseits überwindet Max den Höhenunterschied der Treppe von x Stufen mit der Gesamtgeschwindigkeit $v_M + v_T$, da er sich in Fahrtrichtung der Rolltreppe bewegt und sich die Geschwindigkeiten dadurch addieren. Das macht $\frac{x}{v_M+v_T}$ Minuten.

Durch Gleichsetzen ergibt sich

$$\frac{15}{v_M} = \frac{x}{v_M + v_T}, \quad \text{also } x = \left(1 + \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 15. \tag{1}$$

Wie lange befindet sich Max auf dem Nachhauseweg auf der Rolltreppe? Relativ zur Rolltreppe bewegt er sich mit der Geschwindigkeit v_M und legt in der gesuchten Zeit 35 Stufen zurück. Das macht $\frac{35}{v_M}$ Minuten.

Andererseits überwindet Max den Höhenunterschied der Treppe von x Stufen mit der Gesamtgeschwindigkeit $v_M - v_T$, da er sich gegen die Fahrtrichtung der Rolltreppe bewegt und sich die Geschwindigkeiten dadurch subtrahieren. Das macht $\frac{x}{v_M-v_T}$ Minuten.

Durch Gleichsetzen ergibt sich

$$\frac{35}{v_M} = \frac{x}{v_M - v_T}, \quad \text{also } x = \left(1 - \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 35. \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) erhalten wir

$$\left(1 + \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 15 = \left(1 - \frac{v_T}{v_M}\right) \cdot 35 \quad \longleftrightarrow \quad 20 = \frac{v_T}{v_M} \cdot 50 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{v_T}{v_M} = \frac{2}{5}.$$

Schließlich ergibt Einsetzen dieses Quotienten in (1) die gesuchte Zahl x:

$$x = \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot 15 = 21.$$

Die Rolltreppe hat also 21 Stufen.

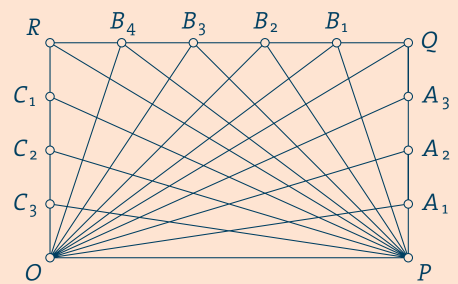
Lösungsvariante: Dieselben Überlegungen können kurz auch wie folgt zusammengefasst werden: Wir wählen die Zeiteinheit (ZE) so, dass Max in ihr genau eine Stufe zurücklegt. Weiter sei r der Stufenanteil, den die Rolltreppe pro Zeiteinheit ZE zurücklegt.

Morgens benötigt Max 15 ZE, wobei Max und die Rolltreppe in dieselbe Richtung laufen, sodass er pro Zeiteinheit insgesamt $(1 + r)$ Stufen schafft. Nachmittags benötigt Max 35 ZE, wobei Max und die Rolltreppe in entgegengesetzte Richtungen laufen, sodass er pro Zeiteinheit insgesamt $(1 - r)$ Stufen schafft.

Deshalb gilt für die gesuchte Stufenzahl x der Treppe $x = 15 \cdot (1 + r) = 35 \cdot (1 - r)$.

Daraus folgt $50 \cdot r = 20$, also $r = 0{,}4$ und $x = 15 \cdot 1{,}4 = 21$.

Aufgabe 3 50. MO / 3. Stufe



Gegeben sei ein Rechteck $OPQR$. Dessen Seiten $\overline{PQ}$ und $\overline{RO}$ seien jeweils durch n Punkte in $n + 1$ gleich lange Strecken und die Seite $\overline{QR}$ durch m Punkte in $m + 1$ gleich lange Strecken geteilt. Die Teilpunkte auf $\overline{PQ}$ seien von P beginnend mit $A_1, \ldots, A_n$ bezeichnet, die auf $\overline{QR}$ von Q beginnend mit $B_1, \ldots, B_m$ und die auf $\overline{RO}$ von R beginnend mit $C_1, \ldots, C_n$. Nun werden von O und P aus zu sämtlichen Teilpunkten und zu den Eckpunkten Q und R Verbindungsstrecken gezeichnet.

Wie viele voneinander verschiedene Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken gibt es im Inneren des Rechtecks?

Die nebenstehende Abbildung veranschaulicht die Aufgabenstellung für $m = 4$ und $n = 3$.

Lösung

Jeder Schnittpunkt X wird eindeutig durch ein geordnetes Paar (U, V) mit

$$U, V \in \{A_1, \ldots, A_n, Q, B_1, \ldots, B_m, R, C_1, \ldots, C_n\}$$

als Schnittpunkt von $\overline{OU}$ und $\overline{PV}$ bestimmt, wobei verschiedene Paare verschiedene Schnittpunkte ergeben, aber nicht jedes Paar zu einem Schnittpunkt führt.

Zählt man also alle Paare, die einen Schnittpunkt liefern, dann kann kein Schnittpunkt doppelt gezählt oder vergessen werden.

Die gesuchte Anzahl wird ermittelt, indem U der Reihenfolge nach die obige Menge durchläuft und jeweils die Anzahl der Schnittpunkte mit allen Strecken $\overline{PV}$ bestimmt wird. So werden alle Schnittpunkte tatsächlich gezählt.

a) Ist $U \in \{A_1, \ldots, A_n, Q\}$, dann erhält man für jedes $V \in \{B_1, \ldots, B_m, R, C_1, \ldots, C_n\}$ einen Schnittpunkt im Inneren des Rechtecks, für jeden dieser $n+1$ Punkte U also genau $m+n+1$ solche Schnittpunkte. Insgesamt sind dies $(n+1)(m+n+1)$ Schnittpunkte.

b) Ist $U = B_i$, $i = 1, \ldots, m$, dann erhält man für jedes $V \in \{B_{i+1}, \ldots, B_m, R, C_1, \ldots, C_n\}$ einen Schnittpunkt im Inneren des Rechtecks, für jedes i also genau $m+n+1-i$ solche Schnittpunkte. Addition der m Anzahlen für $i = 1, \ldots, m$ ergibt $m(m+n+1) - (1+2+\ldots+m) = m(m+n+1) - \frac{1}{2}m(m+1)$ Schnittpunkte.

c) Ist $U \in \{R, C_1, \ldots, C_n\}$, dann liegt $\overline{OU}$ auf der Rechteckseite $\overline{OR}$, kann also keine Schnittpunkte im Inneren des Rechtecks liefern.

Es gibt damit genau

$$(n+1)(m+n+1) + m(m+n+1) - \tfrac{1}{2}m(m+1) = (m+n+1)^2 - \tfrac{1}{2}m(m+1)$$

Schnittpunkte der beschriebenen Art im Inneren des Rechtecks.

(Eine andere Darstellung der Anzahl ist zum Beispiel $\frac{1}{2}m^2 + 2mn + \frac{3}{2}m + n^2 + 2n + 1$.)

Aufgabe 4 49. MO / 4. Stufe

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit $|BC| > |CA|$. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ schneide die Gerade BC in P und die Gerade CA in Q. Der Fußpunkt des von P auf die Gerade CA gefällten Lotes wird mit R, der Fußpunkt des von Q auf die Gerade BC gefällten Lotes wird mit S bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Punkte R, S und der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ auf einer Geraden liegen.

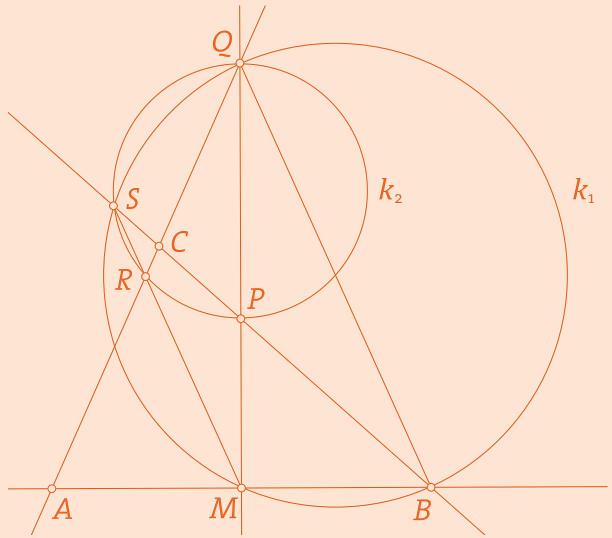
Lösung

Aufgrund der Voraussetzung $|BC| > |CA|$ liegt P auf der Strecke $\overline{BC}$, und da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt R auf der Strecke $\overline{CA}$ (siehe folgende Abbildung). Daher liegen R und M auf derselben Seite der Geraden BC.

Wegen $|\sphericalangle BMQ| = |\sphericalangle BSQ| = 90°$ liegen S und M auf dem Thaleskreis k_1 über dem Durchmesser $\overline{QB}$. Analog folgt aus $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle PSQ| = 90°$, dass R und S auf dem Thaleskreis k_2 über dem Durchmesser $\overline{QP}$ liegen. Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned} |\sphericalangle RSB| = |\sphericalangle RSP| = |\sphericalangle RQP| & \quad \text{(als Peripheriewinkel über der Sehne } \overline{RP} \text{ in } k_2) \\ = |\sphericalangle AQM| = |\sphericalangle MQB| & \quad \text{(da } Q \text{ auf der Mittelsenkrechten von } \overline{AB} \text{ liegt)} \\ = |\sphericalangle MSB| & \quad \text{(als Peripheriewinkel über der Sehne } \overline{MB} \text{ in } k_1). \end{aligned}$$

Damit liegen S, R und M auf einer Geraden.



Aufgabe 1 50. MO / 1. Stufe

In einem Kurbad gibt es 100 Duschkabinen. In jeder Kabine befindet sich ein Hahn, der die Wasserzufuhr zur Dusche dieser Kabine regelt. Durch ein Versehen bei der Installation setzt aber jeder Hahn außerdem auch die Duschen in genau 5 anderen Kabinen in Betrieb.

Man beweise, dass die Kurverwaltung dann immer 10 Kabinen auswählen kann, in denen von der Fehlfunktion nichts zu bemerken ist, wenn die übrigen 90 Kabinen gesperrt werden.

Lösung

Wir zeigen zunächst, dass es (mindestens) eine Dusche gibt, die von höchstens 5 anderen Kabinen aus in Betrieb gesetzt wird. Wir betrachten dazu sämtliche (geordneten) Paare (H, D) von Hähnen und Duschen mit der Eigenschaft, dass D in Funktion tritt, wenn man H aufdreht. Weil jeder Hahn H nach Aufgabenstellung in genau 6 dieser Paare vorkommt, ist ihre Anzahl genau $6 \cdot 100$. Gäbe es nun zu jeder Dusche 6 (oder mehr) Hähne in anderen Kabinen (und den Hahn in der eigenen Kabine), durch deren Betätigung sie in Betrieb gesetzt wird, so gäbe es mindestens $7 \cdot 100$ derartige Paare (H, D). Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch sein muss.

Wir wählen nun eine der Duschen aus, die durch höchstens 5 andere Hähne ausgelöst werden kann. In diese Kabine hängen wir ein Handtuch und nennen sie *belegt*. Alle (höchstens 5) Kabinen, von denen aus die Dusche der belegten Kabine in Betrieb gesetzt wird, werden gesperrt. Durch Öffnen des Hahns der belegten Kabine werden genau 5 andere Duschen in Betrieb gesetzt, deren Kabinen ebenfalls gesperrt werden (wenn das nicht bereits geschehen ist). Die verbleibenden offenen Kabinen ohne Handtuch nennen wir *frei*. Ihre Anzahl beträgt dann mindestens $100 - 11 = 89$.

Ab jetzt betrachten wir nur noch diejenigen Paare (H, D), bei denen H und D sich in freien Kabinen befinden. Jeder Hahn H kommt in höchstens 6 Paaren vor, also gibt es insgesamt höchstens $6 \cdot 89$ Paare. Wie oben sehen wir nun, dass es (mindestens) eine Dusche in

einer freien Kabine geben muss, die von höchstens 5 anderen freien Kabinen aus betätigt werden kann. Wir wählen eine solche Dusche aus, belegen ihre Kabine mit einem Handtuch und sperren alle anderen Kabinen, die diese Dusche auslösen. Durch Öffnen des Hahns der zuletzt belegten Kabine finden wir höchstens fünf weitere bis dahin freie Kabinen, die ebenfalls gesperrt werden müssen. Die Anzahl der freien Kabinen (weder gesperrt noch belegt) beträgt danach mindestens noch $100 - 2 \cdot 11 = 78$.

Durch Fortsetzung dieses Prozesses erhält man in jedem Schritt eine weitere belegte Kabine und muss maximal 10 Kabinen sperren. Nach 9 solchen Schritten sind genau 9 Kabinen belegt (mit Handtuch) und höchstens $9 \cdot 10$ Kabinen gesperrt. Es gibt also wenigstens noch eine freie Kabine. Wir belegen eine solche mit dem zehnten Handtuch und sperren alle übrigen freien Kabinen.

Durch das obige Vorgehen werden alle Kabinen gesperrt, von denen aus Duschen der belegten Kabinen in Betrieb gesetzt werden können. Weil durch die Hähne der belegten Kabinen auch nur die eigene Dusche und fünf weitere in gesperrten Kabinen betätigt werden, funktionieren in den zehn belegten Kabinen alle Duschen korrekt.

Anschließend entfernen wir die mittlerweile nassen Handtücher, die nur zur Kennzeichnung der belegten Kabinen dienten.

Aufgabe 2 50. MO / 2. Stufe

An eine anfangs kreisförmige Schneeflocke lagert sich in jeder Minute eine neue Schicht an. Jede derartige Schicht besteht aus einer Kette von Kreisen, die sich von außen um die Schneeflocke herumlegt. Dabei sollen nach n Minuten, also nach Anlagerung der n-ten Schicht, jeweils folgende Bedingungen gelten:

(i) **Jeder Kreis der neuen n-ten Schicht berührt genau einen oder genau zwei Kreise der vorangehenden $(n-1)$-ten Schicht. (Hierbei gilt die anfängliche kreisförmige Flocke als 0-te Schicht.)**

(ii) **Jeder Kreis der n-ten Schicht berührt genau zwei Kreise der n-ten Schicht.**

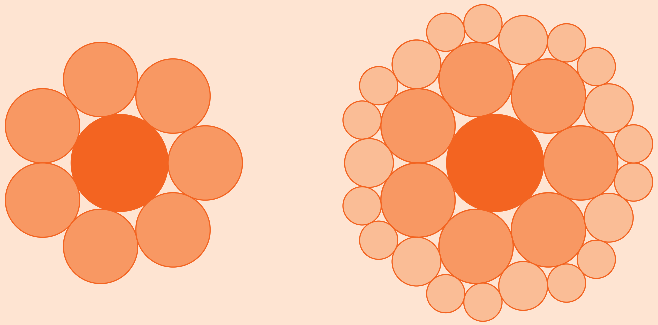
(iii) **Für $n \geq 2$ werden je zwei benachbarte Kreise der vorangehenden $(n-1)$-ten Schicht gemeinsam von genau einem Kreis der neuen n-ten Schicht berührt.**

(iv) **Jeder Kreis, der nicht der n-ten Schicht angehört, wird von genau sieben Kreisen berührt.**

Die folgende Abbildung zeigt eine Schneeflocke nach Anlagerung der ersten Schicht und eine Schneeflocke nach Anlagerung der ersten und der zweiten Schicht.

Nach der Anlagerung von n Schichten bezeichne x_n die Anzahl aller Kreise mit genau 3 und y_n die Anzahl aller Kreise mit genau 4 Nachbarn. Man bestimme alle Zahlen n, für die das Verhältnis $\frac{x_n}{y_n}$ den Wert $\frac{5}{3}$ hat.

Bemerkung: **Es darf vorausgesetzt werden, dass die Anlagerung jeder neuen Schicht möglich ist.**



Lösung

Damit der anfangs vorhandene Kreis nach Anlagerung der ersten Schicht genau sieben Nachbarn hat, muss sich an diesen eine Kette von genau sieben Kreisen anlagern. Jeder dieser neuen Kreise hat dann genau drei Nachbarn, also gilt $x_1 = 7$ und $y_1 = 0$.

Nach Anlagerung der zweiten Schicht haben genau diejenigen neuen Kreise vier Nachbarn, die zwei Kreise der ersten Schicht berühren, alle anderen neuen Kreise haben drei Nachbarn. Die Anzahl y_2 stimmt also mit der Gesamtzahl $x_1 + y_1$ der sich berührenden Kreispaare in der ersten Schicht überein, $y_2 = x_1 + y_1 = 7$.

Nach Anlagerung der zweiten Schicht bestehen die sieben Nachbarn eines Kreises der ersten Schicht aus seinen drei bisherigen Nachbarn, den zwei neuen Nachbarn der zweiten Schicht, die er mit seinen Nachbarn der ersten Schicht gemeinsam hat, und zwei weiteren Kreisen der zweiten Schicht, die keine anderen Kreise der ersten Schicht berühren. Die letzteren Kreise haben deshalb genau drei Nachbarn. Folglich gilt $x_2 = 14$, $y_2 = 7$.

Bei Anlagerung der n-ten Schicht, $n \geq 2$, besteht die $(n-1)$-te Schicht aus x_{n-1} Kreisen, die bisher drei, und y_{n-1} Kreisen, die bisher vier Nachbarn hatten. Da ein Kreis mit bisher vier bzw. drei Nachbarn genau drei bzw. vier weitere Nachbarn der n-ten Schicht braucht,

enthält die n-te Schicht $x_{n-1} + y_{n-1}$ Kreise mit vier Nachbarn und $2x_{n-1} + y_{n-1}$ Kreise mit drei Nachbarn.

Da jeder Kreis der n-ten Schicht genau zwei Nachbarn in der n-ten und einen oder zwei in der $(n-1)$-ten Schicht hat, gibt es in der n-ten Schicht nur Kreise mit genau drei oder vier Nachbarn.

Folglich gilt für $n = 2, 3, \ldots$

$$x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}, \qquad y_n = x_{n-1} + y_{n-1}. \tag{1}$$

Dies ergibt zunächst $x_2 = 14$, $y_2 = 7$ und $x_3 = 35$, $y_3 = 21$, also erfüllt $n = 3$ die Forderung $\frac{x_n}{y_n} = \frac{5}{3}$.

Wir beweisen nun, dass $n = 3$ tatsächlich die einzige Zahl ist, für die $\frac{x_n}{y_n} = \frac{5}{3}$ gilt. Dazu wird gezeigt, dass für $n > 3$

$$\frac{x_n}{y_n} < \frac{5}{3} \tag{2}$$

gilt. Wir stellen zunächst für $n = 4$ fest, dass $x_4 = 91$, $y_4 = 56$ und damit $\frac{x_4}{y_4} = \frac{91}{56} < \frac{5}{3}$ ist, das heißt, (2) gilt für $n = 4$.

Im Weiteren zeigen wir, dass, wenn (2) für ein bestimmtes $n = k$ erfüllt ist, für die nachfolgende Zahl $n = k + 1$ ebenfalls (2) gilt.

Es gelte also (2) für $n = k$. Aus (1) erhält man dann

$$\frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} = \frac{2x_k + y_k}{x_k + y_k} = 1 + \frac{x_k}{x_k + y_k} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{y_k}{x_k}}.$$

Nun schließt man mit der Annahme $\frac{x_k}{y_k} < \frac{5}{3}$ auf $\frac{y_k}{x_k} > \frac{3}{5}$ und weiter folgt

$$\frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{y_k}{x_k}} < 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{13}{8} < \frac{5}{3}.$$

Damit gilt die Ungleichung (2) auch für $n = k + 1$, wenn sie für $n = k$ gilt. Da die Ungleichung (2) für $n = 4$ richtig ist, muss sie also auch für $n = 4 + 1 = 5$ gelten. Analog ergibt sich die Gültigkeit der Ungleichung (2) auch für $n = 5 + 1 = 6$. So fortfahrend erkennt man die Gültigkeit von (2) für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$.

Zusammenfassend gilt somit $\frac{x_n}{y_n} = \frac{5}{3}$ genau für $n = 3$.

Bemerkungen: **1.** Ob die Anlagerung der Kreise bis zu beliebig hohem n möglich ist, hängt von den Radien der Kreise ab und ist nicht Gegenstand der Aufgabe. Es gibt jedoch

Wahlen der Radien, bei denen dies möglich ist; die Abbildung im Aufgabentext zeigt die ersten Schichten einer solchen Konfiguration.

2. Das im Lösungsvorschlag verwendete Verfahren, eine Aussage für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ zu zeigen, indem man nachweist, dass erstens die Aussage für $n = n_0$ gilt und zweitens aus der Gültigkeit der Aussage für $n = k$ stets ihre Gültigkeit für $n = k + 1$ folgt, heißt *vollständige Induktion* und ist eines der wichtigsten Beweisprinzipien der Mathematik.

Aufgabe 3 48. MO / 3. Stufe

Christian denkt sich eine gewisse positive ganze Zahl n, berechnet die Potenzen 4^n und 5^n und stellt fest, dass sie im Dezimalsystem geschrieben mit derselben Ziffer beginnen. Man beweise, dass diese gemeinsame Ziffer entweder eine 2 oder eine 4 sein muss.

Lösung

Ist z die führende Ziffer der Zahlen 4^n und 5^n, so gelten die Ungleichungen

$$z \cdot 10^r \leq 4^n < (z+1) \cdot 10^r,$$
$$z \cdot 10^s \leq 5^n < (z+1) \cdot 10^s$$

mit gewissen nichtnegativen ganzen Zahlen r und s. Wir quadrieren die zweite dieser Ungleichungen und multiplizieren das Ergebnis mit der ersten. Dies liefert

$$z^3 \cdot 10^{r+2s} \leq 10^{2n} < (z+1)^3 \cdot 10^{r+2s}.$$

Da z eine Ziffer ist, erhält man hieraus

$$1 \leq z^3 \leq 10^{2n-r-2s} < (z+1)^3 \leq (9+1)^3 = 1000.$$

Der Ausdruck $2n - r - 2s$ liegt somit zwischen 0 und 2. Für $2n - r - 2s = 0$ würde $z = 1$ folgen. Weiterhin müsste auch $10^r = 4^n$ gelten, da wir sonst eine strenge Ungleichung hätten. Dies ist für $n > 0$ offenbar nicht möglich, da dann auch $r > 0$ sein müsste, andererseits aber 4^n nicht durch 5 teilbar ist. Es bleiben $2n - r - 2s = 1$ oder $= 2$.

Im ersten Fall haben wir $z^3 \leq 10 < (z+1)^3$ und mithin $z = 2$; im zweiten Fall hingegen ist $z^3 \leq 100 < (z+1)^3$, woraus $z = 4$ folgt. Insgesamt ist also stets $z = 2$ oder $z = 4$.

Bemerkung: Die Zahlen 4^{52} und 5^{52} beginnen beide mit der Ziffer 2. Ebenso beginnen 4^{11} und 5^{11} beide mit einer 4. In diesem Sinn ist also das in der Aufgabenstellung genannte Ergebnis optimal.

Aufgabe 4 50. MO / 4. Stufe

Ein Logistikunternehmen bemisst den Preis für das Versenden eines quaderförmigen Päckchens proportional zur Summe seiner drei Maße (Länge, Breite und Höhe). Gibt es Fälle, in denen man das Porto verringern kann, indem man ein teureres Päckchen in ein billigeres verpackt?

Lösung

Nein, solche Fälle gibt es nicht. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, dass ein Quader A mit den Kantenlängen x, y und z einen Quader B mit den Kantenlängen a, b und c enthält. Für eine beliebige positive Zahl d werde mit A_d die Menge aller Punkte bezeichnet, deren Abstand von A nicht größer als d ist. Entsprechend sei B_d definiert. Für das Volumen $|A_d|$ von A_d gilt dann

$$|A_d| = xyz + 2(xy + xz + yz)\,d + \pi(x + y + z)\,d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3,$$

denn A_d ist zusammengesetzt aus dem Quader A selbst, 6 Quadern der „Höhe“ d über den Flächen von A, 12 Viertelzylindern vom Radius d längs jeder Kante von A sowie 8 Achtelkugeln vom Radius d an jeder Ecke von A. Analog hat B_d das Volumen

$$|B_d| = abc + 2(ab + ac + bc)\,d + \pi(a + b + c)\,d^2 + \frac{4}{3}\pi d^3.$$

Da B in A enthalten sein soll, ist für jedes d auch B_d in A_d enthalten. Insbesondere gilt $|B_d| \leq |A_d|$, also

$$abc + 2(ab + ac + bc)\,d + \pi(a + b + c)\,d^2 \leq xyz + 2(xy + xz + yz)\,d + \pi(x + y + z)\,d^2.$$

Division durch die positive Zahl d^2 ergibt

$$\frac{abc}{d^2} + \frac{2(ab + ac + bc)}{d} + \pi(a + b + c) \leq \frac{xyz}{d^2} + \frac{2(xy + xz + yz)}{d} + \pi(x + y + z).$$

Für hinreichend großes d werden die beiden ersten Summanden auf beiden Seiten beliebig klein, sodass die Ungleichung nur gelten kann, wenn $a + b + c \leq x + y + z$ erfüllt ist.

MATHEMATIK-OLYMPIADEN IN DEUTSCHLAND

Träger und Förderer

Träger der Mathematik-Olympiaden in Deutschland ist der Verein Mathematik-Olympiaden e. V., der 1994 mit Sitz in Rostock gegründet wurde. 1. Vorsitzender des Vereins ist Prof. Dr. Jürgen Prestin, Universität zu Lübeck.

Der Verein ist verantwortlich für den Aufgabenausschuss, das zentrale Gremium der Mathematik-Olympiaden, der den einzelnen Olympiade- und Altersstufen gemäße Aufgaben ehrenamtlich erarbeitet und bundesweit zur Verfügung stellt. Die über 50 Mitglieder des Aufgabenausschusses sind Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer sowie Mathematikerinnen und Mathematiker aus nahezu allen Bundesländern. Damit wird gewährleistet, dass die Aufgaben den Lehrplänen der einzelnen Bundesländer angepasst sind. Gemeinsam mit dem jeweiligen regionalen Veranstalter führt der Mathematik-Olympiaden e. V. die Bundesrunden durch. Seit einigen Jahren wird die Bundesrunde in erheblichem Umfang durch die Hector-Stiftung II finanziell unterstützt.

Die Geschäftsstelle, die Bundesrunde und die Arbeit des Aufgabenausschusses der Mathematik-Olympiaden in Deutschland werden vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert. Die Geschäftsstelle wird von Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH im Verbund der Bundesweiten Mathematik-Wettbewerbe geführt.

Bildung & Begabung, das Zentrum für Begabungsförderung in Deutschland, bündelt mit seinen Akademien und Wettbewerben ein vielfältiges Förderangebot für junge Talente, bietet umfassende Informationsangebote und setzt sich in der Begabungsförderung für Vernetzung und Transparenz ein. Mit seinen Projekten erreicht Bildung & Begabung jedes Jahr mehr als 240 000 talentierte junge Menschen. Bildung & Begabung ist eine Initiative des Stifterverbandes für die Deutsche Wissenschaft und wird maßgeblich vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) gefördert. Weitere Partner sind die Bundesländer, Stiftungen, Unternehmen und private Geldgeber. Schirmherr von Bildung & Begabung ist der Bundespräsident.

Druck und Versand der Aufgaben erfolgen durch den Cornelsen-Verlag, der die Mathematik-Olympiaden auf diese Weise unterstützt.

Mathematik-Olympiaden e. V.

c/o Universität zu Lübeck
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Prestin
1. Vorsitzender des Mathematik-Olympiaden e. V.
Ratzeburger Allee 160
23562 Lübeck
verein@mathematik-olympiaden.de

Geschäftsstelle

Mathematik-Olympiaden in Deutschland
Geschäftsstelle
Bildung & Begabung gemeinnützige GmbH
Kortrijker Straße 1
53177 Bonn
0228/9 59 15 25
mo@mathe-wettbewerbe.de

www.mathematik-olympiaden.de

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung
Cornelsen
Hector Stiftung II

NOTIZEN